Zasada nieoznaczoności w pociągu

Grzegorz WROCHNA

Jednym z podstawowych, a jednocześnie „tajemniczych” wyników mechaniki kwantowej jest zasada nieoznaczoności. Według niej niemożliwe jest jednoczesne określenie położenia i prędkości danego obiektu z dowolną dokładnością. Ściślej, iloczyn niepewności wyznaczenia położenia Δx i pędu Δp nie może być mniejszy niż połowa stałej Plancka
$\hbar = h/2\pi = 1.0546 \cdot 10^{-34}$Js

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Wynik ten jest o tyle szokujący, że w mechanice klasycznej bez dokładnej znajomości położenia i pędu nie możemy nic powiedzieć o ewolucji układu. Dlatego często w popularnych przedstawieniach mechaniki kwantowej zasada nieoznaczoności ukazywana jest jako coś niezwykłego.
W niniejszym artykule spróbujemy rozjaśnić nieco tę tajemniczość odwołując się do prostej anaolgii.

Wyobraźmy sobie, że stoimy na peronie i chcemy zmierzyć prędkość przejeżdżającego pociągu. Do dyspozycji mamy zegarek i wiemy, że każdy wagon ma długość $\lambda = 20\,\mathrm{m}$. Pomiaru prędkości możemy dokonać odmierzając zegarkiem określony odcinek czasu t i licząc wagony, które w tym czasie nas minęły. Jeśli minęło nas n wagonów, to pokonana przez pociąg droga wynosi $l = n\lambda$ z dokładnością do $\Delta l = \lambda/2$. W wyniku pomiaru otrzymamy prędkość

$$v = \frac{l}{t} = \frac{n\lambda}{t}$$

z dokładnością

$$\Delta v = \frac{\Delta l}{t} = \frac{\lambda}{2t} = \frac{v}{2n}$$

Ze wzoru w sposób oczywisty wynika, że im większy interwał czasu, czy też im dłuższą drogę wybieramy, tym dokładniejszy będzie pomiar prędkości. Pamiętać jednak należy, że zawsze będzie to prędkość **średnia** na odcinku $l = n\lambda$. Innymi słowy położenie pociągu x w chwili pomiaru znane jest z dokładnością $\Delta x = l/2 = n\lambda/2$. Mamy więc sytuację typową dla zasady nieoznaczoności: możemy niezbyt precyzyjnie zmierzyć prędkość na krótkim odcinku, ale w dość dobrze określonym miejscu lub uzyskać dużą dokładność pomiaru prędkości średniej rezygnując z precyzyjnego określenia miejsca. Ujmując rzecz matematycznie

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{v\lambda}{4}$$

lub w języku pędu

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{p\lambda}{4} \tag{1}$$

W mechanice kwantowej położenie cząstki można opisać za pomocą tzw. paczki falowej. Paczka falowa to fala, której amplituda jest istotnie różna od zera dla skończonej liczby okresów n, a więc w ograniczonym obszarze $l = n\lambda$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki koncentruje się w tym właśnie obszarze. Długość fali λ wyznaczona jest przez pęd cząstki p:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{2}$$

W naszej analogii każdy wagon pociągu odpowiada jednemu okresowi takiej fali. Możemy więc podstawić (2) do (1) i otrzymamy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$$

Pominęliśmy tu czynnik $2\pi/4$ gdyż niezbyt precyzyjna definicja Δx i Δp pozwala nam jedynie na zgrubne oszacowanie.

Do podobnego rezultatu możemy dojść także w inny sposób, nie posługując się bezpośrednio formalizmem falowym. Zauważmy, że uzyskana „zasada nieoznaczoności" (1) jest konsekwencją „skwantowania" drogi, którą mierzyliśmy w dyskretnych jednostkach λ. Podobną rolę odgrywa w mechanice kwantowej wielkość fizyczna S zwana działaniem. W ogólnym przypadku działanie definiujemy jako całkę po czasie z różnicy pomiędzy energią kinetyczną i potencjalną. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego działanie można wyrazić jako iloczynem pędu p i drogi l:

$$S = \frac{pl}{2}$$

Według mechaniki kwantowej działanie można określić z dokładnością rzędu stałej Plancka $\hbar$:

$$\Delta S \gtrsim \hbar$$

Postać kwantowomechanicznej zasady nieoznaczoności możemy zatem odgadnąć przez analogię, zastępując we wzorze (1) kwant drogi λ kwantem działania $\hbar$:

$$\frac{p\lambda}{2} \leftrightarrow \Delta S \gtrsim \hbar$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Przedstawiona analogia, choć nie jest formalnym wyprowadzeniem, dobrze ilustruje jedną z podstawowych idei mechaniki kwantowej: niemożność jednoczesnego określenia położenia i pędu z dowolną dokładnością jest wynikiem istnienia kwantu działania $\hbar$.